CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICA „PANAITOPOL”

EDIŢIA a VII-A, TULCEA, 1aprilie 2016

Soluţii orientative şi bareme

Clasa a VIII-a

Problema 1.

Se consideră o mulţime nevidă M de numere reale nenule cu proprietatea că, oricare ar fi $x, y, z \in M$, avem $xy + yz + zx \in \mathbb{Q}$. Arătaţi că, oricare ar fi $a, b \in M$, avem $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$.

Pentru $x = y = z = a \in M$, obţinem $3a^2 \in \mathbb{Q}$, deci $a^2 \in \mathbb{Q}$, oricare ar fi $a \in M$.	**2p**
Pentru $x = b, y = z = a$, obţinem $a^2 + 2ab \in \mathbb{Q}$, oricare ar fi $a, b \in M$.	**3p**
Deducem că $ab \in \mathbb{Q}$, oricare ar fi $a, b \in M$, deci $\frac{a^2}{ab} = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, oricare ar fi $a, b \in M$.	**2p**

Problema 2.

a) Arătați că $a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}$, oricare ar fi numerele reale *a* și *b*.

b) Determinați numerele reale $x, y \geq 0$ astfel încât $\begin{cases} [x]^2 + \{y\}^2 \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \\ [y]^2 + \{x\}^2 \leq \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 \end{cases}$, unde $[a]$ și $\{a\}$ reprezintă partea întreagă și respectiv partea fracționară a numărului real *a*.

Prof. Lucian Petrescu, Tulcea

a) Se obține prin echivalență $(a-b)^2 \geq 0$, egalitatea având loc dacă și numai dacă $a = b$, sau se folosește inegalitatea dintre media aritmetică și media pătratică. **b)** Adunând membru cu membru cele două inegalități din ipoteză rezultă: $\left([x]^2 + \{x\}^2\right) + \left([y]^2 + \{y\}^2\right) \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$ **(1)** Conform cu punctul **a)** obținem $[x]^2 + \{x\}^2 \geq \frac{\left([x] + \{x\}\right)^2}{2} = \frac{x^2}{2}$ **(2)** și analog $[y]^2 + \{y\}^2 \geq \frac{\left([y] + \{y\}\right)^2}{2} = \frac{y^2}{2}$. **(3)** Sumând ultimele două inegalități rezultă $\left([x]^2 + \{x\}^2\right) + \left([y]^2 + \{y\}^2\right) \geq \frac{x^2 + y^2}{2}$ și, ținând seama acum de relația **(1)**, deducem că $\left([x]^2 + \{x\}^2\right) + \left([y]^2 + \{y\}^2\right) = \frac{x^2 + y^2}{2}$, adică trebuie să avem egalitate în inegalitățile **(2)** și **(3)**.	

Prin urmare: $\begin{cases}[x]=\{x\}\\ [y]=\{y\}\end{cases}$, de unde rezultă în final că $x=y=0$.	

Problema 3.

Numerele reale nenule *a*, *b*, *c* şi *d* au module diferite şi verifică relaţia $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=0$.

a) Arătaţi că $\frac{a+b}{a(c+d)}+\frac{a+c}{a(b+d)}+\frac{a+d}{a(b+c)}+\frac{b^2+c^2+d^2}{bcd}=0$;

b) Pentru $a=2$ şi $b=-3$, arătaţi că există $c,d\in\mathbb{Z}$ astfel încât numerele *a*, *b*, *c* şi *d* să verifice condiţiile din ipoteză.

Prelucrare, SGM nr.1/2017

a) Egalitateadin enunţ ne conduce la $\frac{a+b}{c+d}=-\frac{ab}{cd}$, $\frac{a+c}{b+d}=-\frac{ac}{bd}$, $\frac{a+d}{b+c}=-\frac{ad}{bc}$	**2p**
Înlocuind, obţinem prin calcul direct egalitatea cerută.	**1p**
b) Obţinem ecuaţia echivalentă $(c+6)(d+6)=36$, cu $c,d\in\mathbb{Z}$	**2p**
De exemplu, pentru $c+6=2$ şi $d+6=18$, obţinem $c=-4, d=12$ care verifică ipoteza	**2p**

Problema 4.

Punctele *S*, *Q* și *R* sunt mijloacele muchiilor $[A'D']$, $[AB]$ și respectiv $[CC']$ ale cubului $[ABCDA'B'C'D']$ cu $AB=a$. Calculaţi distanţa de la punctul *B* la planul (SQR) .

Planele $(A'BC')$ şi $(AD'C)$ sunt paralele. Deoarece *S*, *Q* și *R* sunt mijloacele segmentelor $[A'D']$, $[AB]$ și respectiv $[CC']$, conform *reciprocei teoremei lui Thales în spaţiu*, deducem că planul (SQR) este paralel cu planele $(A'BC')$ şi $(AD'C)$ şi egal distanţat de ele.	**1 p** **2p**
Distanţa dintre planele $(A'BC')$ şi $(AD'C)$ este egală cu $a\frac{\sqrt{3}}{3}$. Cum *B* este situat în planul $(A'BC')$, înseamnă că distanţa de la *B* la planul (SQR) este egală cu $a\frac{\sqrt{3}}{6}$.	**2p** **2p**